



Kompendium

Competenz4University

Die Lösungen sind im Anhang zu finden.

1 Funktionen

1.1 Quadratische Funktion 1

Gegeben sind drei quadratische Funktionen. Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen der Funktionen. Falls keine Nullstellen existieren, begründen Sie dies.

1.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

2.

$$g(x) = 2x^2 - 4x + 2$$

3.

$$h(x) = x^2 + 2x + 5$$

1.2 Quadratische Funktion 2

Gegeben ist die quadratische Funktion in der Normalform:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

1. Bestimmen Sie die Nullstellenform der Funktion.
2. Wandeln Sie die Funktion durch quadratische Ergänzung in die Scheitelform um.

1.3 Polynomdivision 1

Gegeben ist das Polynom $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

1. Teilen Sie das Polynom durch $x - 2$ mittels des euklidischen Algorithmus (klassische Polynomdivision).
2. Führen Sie die Polynomdivision mithilfe des Horner-Schemas durch.

1.4 Funktionsanalyse 1

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ und führen Sie folgende Analysen durch:

1. **Definitionsbereich:** Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x)$.
2. **Wertebereich:** Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion $f(x)$.
3. **Parität:** Bestimmen Sie, ob die Funktion gerade, ungerade oder keins von beidem ist.
4. **Monotonieverhalten:** Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion und bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion monoton steigt oder fällt.
5. **Asymptotisches Verhalten:** Analysieren Sie das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$, sowie das Verhalten an eventuellen Unstetigkeitsstellen.
6. **Konkavität:** Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion konkav bzw. konvex ist, und finden Sie mögliche Wendepunkte.



7. **Graph der Funktion:** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.
8. **Flächenberechnung:** Berechnen Sie die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[0, 1]$.

1.5 Funktionsanalyse 2

Betrachten Sie die Funktion, definiert durch

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4}.$$

Analysieren Sie die Funktion hinsichtlich folgender Punkte:

1. **Definitionsbereich:** Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion.
2. **Wertebereich:** Finden Sie den Wertebereich der Funktion.
3. **Parität:** Bestimmen Sie, ob die Funktion gerade, ungerade oder weder noch ist.
4. **Monotonieverhalten:** Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
5. **Asymptotisches Verhalten:** Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$. Analysieren Sie auch das Verhalten an Unstetigkeitsstellen.
6. **Konkavität:** Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion konkav oder konvex ist, und die Wendepunkte.
7. **Graphen der Funktion:** Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.
8. **Berechnung der Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse:** Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[-3, 3]$.



2 Lösungen

2.1 Funktionen

2.1.1 Quadratische Funktion 1

1. Die Funktion lautet:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Die Diskriminante D wird berechnet:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

Da $D > 0$, besitzt die Funktion zwei Nullstellen. Diese werden mit der Mitternachtsformel berechnet:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

Die Nullstellen sind also $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$.

2. Die Funktion lautet:

$$g(x) = 2x^2 - 4x + 2$$

Die Diskriminante D wird berechnet:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$$

Da $D = 0$, besitzt die Funktion genau eine doppelte Nullstelle. Diese wird mit der Mitternachtsformel berechnet:

$$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

Die Nullstelle ist $x = 1$.

3. Die Funktion lautet:

$$h(x) = x^2 + 2x + 5$$

Die Diskriminante D wird berechnet:

$$D = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

Da $D < 0$, besitzt die Funktion keine Nullstellen im reellen Bereich.



2.1.2 Quadratische Funktion 2

1. Die quadratische Funktion lautet:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

Zunächst bestimmen wir die Nullstellen mithilfe der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4}$$

$$x_1 = \frac{8 + 4}{4} = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{8 - 4}{4} = 1$$

Die Nullstellenform lautet daher:

$$f(x) = 2(x - 3)(x - 1)$$

2. Um die Funktion in die Scheitelform umzuwandeln, verwenden wir die quadratische Ergänzung. Die gegebene Funktion lautet:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

Zuerst faktorisieren wir die 2 aus den ersten beiden Termen:

$$f(x) = 2(x^2 - 4x) + 6$$

Nun ergänzen wir die quadratische Ergänzung. Dazu nehmen wir den Linearfaktor -4 , halbieren ihn ($\frac{-4}{2} = -2$) und quadrieren ihn $(-2)^2 = 4$:

$$f(x) = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 6$$

Fassen wir zusammen:

$$f(x) = 2((x - 2)^2 - 4) + 6$$

Multiplizieren wir aus:

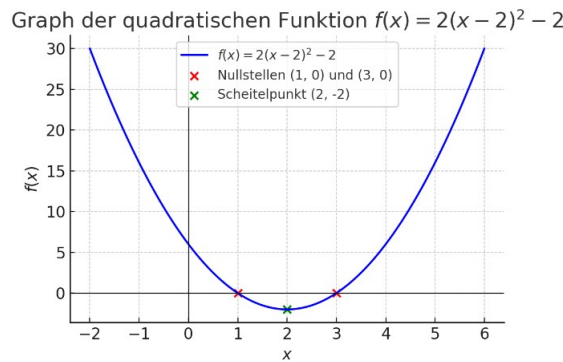
$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 8 + 6$$

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 2$$

Die Scheitelform der Funktion lautet also:

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 2$$

Das Scheitelpunkt ist $S(2, -2)$.



2.1.3 Polynomdivision 1

1. Das zu teilende Polynom lautet:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

Wir teilen $P(x)$ durch $x - 2$.

1. Der Leitkoeffizient von $P(x)$ ist $2x^3$. Um $2x^3$ durch $x - 2$ zu teilen, teilen wir $2x^3$ durch x , was $2x^2$ ergibt. Multiplizieren wir nun $2x^2$ mit $x - 2$:

$$2x^2 \cdot (x - 2) = 2x^3 - 4x^2$$

Subtrahieren wir dies vom Polynom:

$$(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) - (2x^3 - 4x^2) = x^2 - 11x + 6$$

2. Jetzt teilen wir x^2 durch x , was x ergibt. Multiplizieren wir x mit $x - 2$:

$$x \cdot (x - 2) = x^2 - 2x$$

Subtrahieren wir:

$$(x^2 - 11x + 6) - (x^2 - 2x) = -9x + 6$$

3. Nun teilen wir $-9x$ durch x , was -9 ergibt. Multiplizieren wir -9 mit $x - 2$:

$$-9 \cdot (x - 2) = -9x + 18$$

Subtrahieren wir:

$$(-9x + 6) - (-9x + 18) = 6 - 18 = -12$$

Das Ergebnis der Division lautet:

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + x - 9) - 12$$

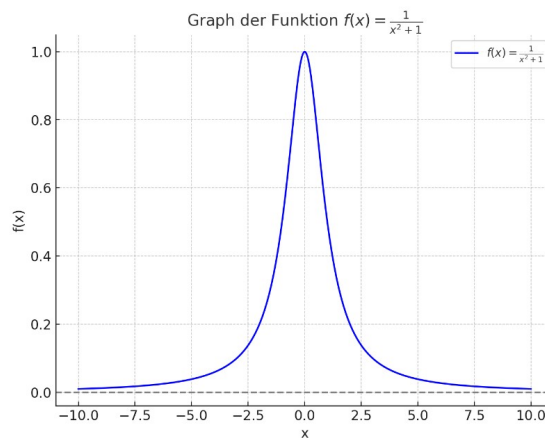
2. Wir wenden das Horner-Schema auf $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ an, um durch $x - 2$ zu teilen. Die Koeffizienten des Polynoms sind 2, -3, -11, 6.
Schritt 1: Setzen Sie die 2 als ersten Koeffizienten.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -3 & -11 & 6 \\ & & 4 & 2 & -18 \\ \hline & 2 & 1 & -9 & -12 \end{array}$$

Schritt 2: Der Quotient lautet $2x^2 + x - 9$ und der Rest ist -12 .

Das Ergebnis ist:

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + x - 9) - 12$$



2.1.4 Funktionsanalyse 1

1. Definitionsbereich: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, da der Nenner $x^2 + 1$ niemals Null wird. Daher ist der Definitionsbereich:

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. Wertebereich: Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt $x^2 + 1 \geq 1$, also ist $f(x) \leq 1$. Der Funktionswert ist immer positiv, da $x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Wertebereich ist also:

$$W_f = (0, 1]$$

3. Parität: Die Funktion ist gerade, da $f(-x) = f(x)$ gilt. Dies sieht man leicht, wenn man $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$ betrachtet.
4. Monotonieverhalten: Die Ableitung von $f(x)$ lautet:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Für $x > 0$ ist $f'(x) < 0$, und für $x < 0$ ist $f'(x) > 0$. Die Funktion ist also auf $(-\infty, 0]$ monoton steigend und auf $[0, \infty)$ monoton fallend.

5. Asymptotisches Verhalten: Für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ nähert sich $f(x)$ der Asymptote $y = 0$, da $\frac{1}{x^2+1} \rightarrow 0$. Die Funktion hat keine Unstetigkeitsstellen, da sie überall definiert ist.
6. Konkavität: Die zweite Ableitung von $f(x)$ lautet:

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

Setzt man $f''(x) = 0$, erhält man $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ als Wendepunkte. Die Funktion ist für $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ konkav ($f''(x) < 0$), und für $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist sie konvex ($f''(x) > 0$).

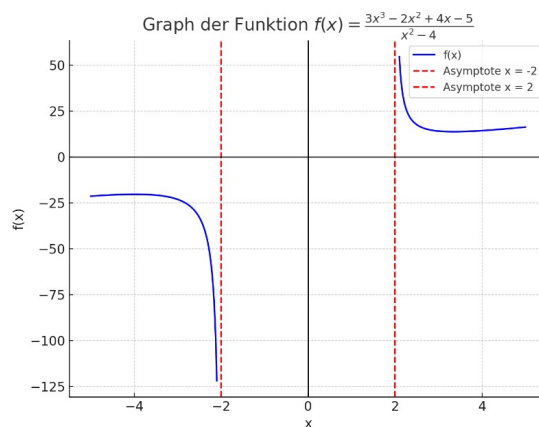
7. Graph der Funktion: Der Graph der Funktion verläuft symmetrisch zur y-Achse, nähert sich für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ der Asymptote $y = 0$ und hat ein Maximum bei $x = 0$ mit $f(0) = 1$.
8. Flächenberechnung: Die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[0, 1]$ berechnet sich als:

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

Diese Integral ist bekannt und ergibt:

$$A = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Somit beträgt die Fläche $A = \frac{\pi}{4}$.



2.1.5 Funktionsanalyse 2

1. Definitionsbereich: Die Funktion $f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4}$ ist eine gebrochen rationale Funktion. Der Nenner $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ hat die Nullstellen $x = 2$ und $x = -2$. Somit ist die Funktion an diesen Punkten nicht definiert. Der Definitionsbereich ist daher:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

2. Wertebereich: Um den Wertebereich zu bestimmen, müssen wir das Verhalten der Funktion an den Asymptoten und Unstetigkeitsstellen untersuchen. Für große $|x|$ nähert sich die Funktion einer schiefen Asymptote. Der Wertebereich ist daher:

$$W = \mathbb{R}.$$

3. Parität: Eine Funktion ist gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$, und ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$. Durch Einsetzen von $-x$ in $f(x)$ erhalten wir:

$$f(-x) = \frac{-3x^3 - 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4}.$$

Da $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$, ist die Funktion weder gerade noch ungerade.

4. Monotonieverhalten: Um das Monotonieverhalten zu bestimmen, berechnen wir die Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(9x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4) - (3x^3 - 2x^2 + 4x - 5) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}.$$

Die Funktion ist auf $(-\infty, -2)$ und $(2, \infty)$ streng monoton steigend.

5. Asymptotisches Verhalten: Für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ verhält sich die Funktion wie eine gebrochen rationale Funktion vom Grad 1 (schiefe Asymptote). Durch Polynomdivision erhalten wir:

$$f(x) \approx 3x + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

An den Unstetigkeitsstellen $x = 2$ und $x = -2$ gibt es senkrechte Asymptoten.

6. Konkavität: Die zweite Ableitung von $f(x)$ zeigt, dass die Funktion auf $(-\infty, -2)$ konkav ist und auf $(2, \infty)$ konvex.
7. Graph der Funktion: Der Graph zeigt senkrechte Asymptoten bei $x = -2$ und $x = 2$, sowie eine schiefe Asymptote für große $|x|$.

- 
8. Flächenberechnung: Die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[-3, 3]$ ist gegeben durch:

$$A = \int_{-3}^3 |f(x)| dx.$$

Da die Funktion an $x = -2$ und $x = 2$ Unstetigkeitsstellen hat, muss das Integral als uneigentliches Integral berechnet werden:

$$A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-3}^{-2-\epsilon} |f(x)| dx + \int_{-2+\epsilon}^{2-\epsilon} |f(x)| dx + \int_{2+\epsilon}^3 |f(x)| dx \right).$$